

Классическая динамика дионов со спином

М. Е. Малев

Национальный исследовательский Томский государственный университет
Физический факультет

12.02.2026

Часть 1: общий обзор

- История
- Современное состояние поиска монополей

Часть 2: физика дионов

- Модель Цванцигера
- Наша работа

Дион — это частица, обладающая электрическим и магнитным зарядом — электрически заряженный магнитный монополь.

Часть 1
Общий обзор монополей и
дионов

- Большую часть истории люди были уверены, что полюса у магнитна два.
- Максвелл записал свои уравнения, исходя из этой уверенности, хотя они допускают введение магнитных зарядов.
- Тренд сломал Дирак, когда попробовал объяснить квантование электрического заряда.
- Расцвет размышлений о моноплях: КТП. Самая известная модель т' Хофта и Полякова.
- Гипотеза Швингера о дионах как составляющих компонентов адронов — не оправдалась :(
- Теории Великого Объединения предполагают существование монополей, разбросанных по Вселенной в ходе инфляции.

Дирак предположил существование магнитных зарядов, и пришёл к выводу, что магнитный заряд должен квантоваться:

$$g = n \cdot g_0 = n \cdot \frac{\hbar c}{2e_0} . \quad (1)$$

Условие квантования обобщается на частицы с электрическим и магнитным зарядом:

$$\frac{e_1 g_2 - e_2 g_1}{2\pi\hbar c} = n . \quad (2)$$

Особенность монополя Дирака — т.н. «струна Дирака».

Теория Дирака не предсказывает массу такого монополя.

- Пришли к выводу, что существование монополей обязательно в некоторых полевых теориях.
- Одним из главных отличий монополя т' Хофта–Полякова от монополя Дирака является то, что это решение гладкое и не содержит сингулярностей в физических полях. В компактных неабелевых калибровочных группах решения для монополя являются регулярными, так что струна Дирака не возникает.
- Вторым серьёзным отличием является то, что монополи т' Хофта–Полякова имеют конечную энергию покоя. Однако в реалистичных теориях Великого Объединения (GUT) масса монополя т' Хофта–Полякова оценивается вблизи масштаба $\sim 10^{14} - 10^{16}$ ГэВ.

- Поиски не увенчались успехом.
- Основные методы поисков:
 - Регистрация магнитного поля (SQUID-детекторы)
 - Черенковское излучение
 - Ядерные трековые детекторы
 - Эффект Каллана-Рубакова
- Эксперименты:
 - На LHC — ATLAS, MoEDAL (NTD+SQUID)
 - Черенковские и нейтринные телескопы
 - Поиски монополей, захваченных в веществе

Часть 2

Физика дионов

Задача Кеплера

Задача Кеплера это задача описания движения частицы в потенциале вида

$$V(r) = -\frac{k}{r}. \quad (3)$$

В сферических координатах кеплеровский гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{\mathbf{p}_r^2}{2m} + \frac{\mathbf{L}^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}, \quad (4)$$

где \mathbf{p}_r — радиальная компонента импульса, m — масса частицы, $\mathbf{L} = [\mathbf{x}, \mathbf{p}]$ — угловой момент. Эта задача интегрируема, она имеет максимальное число интегралов движения (5): 3 компоненты углового момента и 2 компоненты вектора Рунге-Ленца:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{m} \mathbf{p} \times \mathbf{J} - k \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (5)$$

1968 **Цванцигер [1] (а также Макинтош и Сиснерос в 1970 [2]):**

Построили и описали модель MIC-Kepler — однопараметрическую деформацию стандартной задачи Кеплера. Введённый параметр интерпретируется как магнитный заряд. Они показали, что полученная система обладает той же симметрией, что и «чистая» задача Кеплера.

2004 **Мардоян, Нерсессян, Петросян [3]:**

Описали линейный эффект Штарка в системе из заряженной частицы и дираковского диона.

2018 **Дериглазов и Пупасов-Максимов [4]:** Разработали Пуанкаре-инвариантный вариационный формализм для частиц со спином

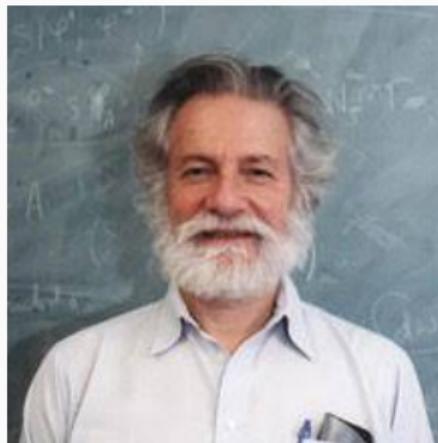
Дион Цванцигера: гамильтониан

В 1968 году Дэниел Цванцигер описал систему из двух дионов произвольного электрического и магнитного заряда [1], генерирующих магнитное поле

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{g}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (6)$$

Здесь g — магнитный заряд, создающий поле \mathbf{B} . Обозначив «незаряженную» часть потенциала \mathbf{A} как $\mathbf{D}(r)$, а электрические заряды и массы e_a, m_a $a = 1, 2$ соответственно, можно записать следующий гамильтониан:

$$H_d = \frac{1}{2m_1} \left[\mathbf{p}_1 - \frac{e_1 g_2 - e_2 g_1}{4\pi c} \mathbf{D}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right]^2 + \frac{1}{2m_2} \left[\mathbf{p}_2 - \frac{e_2 g_1 - e_1 g_2}{4\pi c} \mathbf{D}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \right]^2 + \frac{e_1 e_2 + g_1 g_2}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (7)$$



Перейдём в систему центра масс, и введём обозначения

$$\begin{aligned} m &= (m_1^{-1} + m_2^{-1})^{-1}, \quad \alpha = -\frac{e_1 e_2 + g_1 g_2}{4\pi}, \quad \mu = \frac{e_1 g_2 - g_1 e_2}{4\pi \hbar c}, \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{p} = \frac{m_2 \mathbf{p}_1 - m_1 \mathbf{p}_2}{m_1 + m_2}, \quad \Pi = \mathbf{p} - \mu \mathbf{D}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (8)$$

Пренебрегая движением системы как целого, получаем гамильтониан

$$H = \frac{1}{2m} \Pi^2 - \frac{\alpha}{r} + V(\mathbf{r}). \quad (9)$$

Параметры α и μ выступают в этом выражении в качестве констант связи. Кроме того, из дираковского условия квантования известно, что $\mu \in \mathbb{Z}$.

Гамильтониан (9) имеет сферическую симметрию. Перейдём в полярные координаты, а также введём угловой момент

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{\Pi} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (10)$$

и конкретную форму потенциала

$$V(r) = \frac{\mu^2}{2mr^2}. \quad (11)$$

Тогда можно переписать гамильтониан в виде

$$H \frac{1}{2m} \Pi_r^2 + \frac{1}{2mr^2} \mathbf{J}^2 - \frac{\alpha}{r}. \quad (12)$$

Это точь в точь гамильтониан кеплеровской задачи. Интегралы движения этой системы также совпадают с кеплеровскими: сохраняются угловой момент (10) и вектор Рунге-Ленца

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2m} (\mathbf{\Pi} \times \mathbf{J} - \mathbf{J} \times \mathbf{\Pi}) - \alpha \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (13)$$

- Волновая функция основного состояния системы MIC-Kepler имеет вырождение по магнитному числу и обладает ненулевым дипольным моментом во внешнем электрическом поле.
- Волновая функция системы заряд-дион совпадает с атомом водорода для случая $\mu = 0$. Когда $\mu \neq 0$, оно приводит к сдвжке магнитного числа.
- Система демонстрирует аналогичное атому водорода расщепление уровней, пропорциональное n^2 .
- Тем не менее, поместив систему заряд-дион в электрическое поле, вырождение по магнитному числу снимается *полностью* (в отличие от атома водорода, где линейный эффект Штарка расщепляет уровни на $2n-1$ компонент).

- В нашей работе мы модифицировали гамильтониан системы MIC-Kepler, добавив к нему спиновые члены, аналогичные введем Дериглазовым.
- В результате мы получили систему двух взаимодействующих спиновых дионов.
- Для этой системы были найдены уравнения движения, интегралы движения (а также производящая процедура для интегралов), численно построены классические траектории.

Гамильтониан системы двух спиновых дионов

Гамильтониан с добавочными спиновыми членами в системе центра масс (аналогичный (9)), в безразмерных единицах, имеет вид

$$H = mc^2 \alpha^2 \left[\frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{r} + V(r) - \left(\beta_1 \mathbf{S}_1 + \beta_2 \mathbf{S}_2, \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \right], \quad (14)$$

где

$$\beta_a = (-1)^{a+1} \frac{e_a \gamma_a g_{a+1}}{m_a} \frac{m}{8\pi \hbar c}. \quad (15)$$

Здесь γ_a — гиромагнитные отношения. Гамильтониан (14) приводит к следующим уравнениям движения:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \Pi, \\ \frac{d\Pi}{dt} &= \mu \left[\Pi, \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right] - \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\partial V(r)}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\mathbf{S}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{S}, \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5}, \\ \frac{d\mathbf{S}^a}{dt} &= -\beta_a \left[\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \mathbf{S}^a \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Модель (14) имеет восемь интегралов движения: энергию, вектор полного углового момента и четыре дополнительные сохраняющиеся величины, являющиеся скалярами. Вектор полного углового момента имеет вид:

$$\mathbf{J} = [\mathbf{r}, \Pi] + \beta_1 \mathbf{s}_1 + \beta_2 \mathbf{s}_2 - \mu \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (17)$$

Выражения остальных интегралов движения могут быть получены с использованием производящей процедуры. В общем случае они громоздки и малоинформативны. В случае, когда лишь один из дионов обладает ненулевым спином, число дополнительных независимых интегралов движения сокращается до двух:

$$\begin{aligned} j_1 &= \left(\mathbf{J}, \mathbf{s} + \beta \frac{\mathbf{r}}{r} \right), \\ j_2 &= -2 \left(\mathbf{J}, \mathbf{s} + 2\beta \frac{\mathbf{r}}{r} \right) + 2\beta \left(\mathbf{s}, \frac{\mathbf{r}}{r} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Производящая процедура интегралов движения

Производные \mathbf{S} , \mathbf{L} , \mathbf{r}/r имеют одинаковую структуру: $[\mathbf{r}/r^3, \dots]$.

Интегралы ищутся в виде анзаца:

$$I^2 = \mathbf{J}^2/2, \quad \mathbf{J} = A\mathbf{L} + B\mathbf{S}_1 + C\mathbf{S}_2 + D\frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (19)$$

Требование $d\mathbf{J}^2/dt = 0$ приводит к условию на параметры A, B, C, D :

$$\frac{-A}{\mu A + D} = \frac{B}{\beta_1(A - B)} = \frac{C}{\beta_2(A - C)} = \frac{1}{t}. \quad (20)$$

Отсюда можно выразить три параметра через A . Поскольку параметры произвольны, можно положить $A = 1$. Это приводит к выражению

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{L} + \frac{\beta_1}{t - \beta_1}\mathbf{S}_1 + \frac{\beta_2}{t - \beta_2}\mathbf{S}_2 - (t + \mu)\frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (21)$$

Выделение членов при степенях t в силу произвольности t в выражении \mathbf{J}_t^2 даёт искомые интегралы движения.

Классические траектории движения одного диона вокруг другого были построены численным интегрированием уравнений (16) в двух вариантах.

- Упрощённый вариант: траектории на плоскости.
- Полные траектории в трёхмерном пространстве.

Картинки отдельно

Спасибо за внимание!

Список литературы

-  *Zwanziger D.* — **Exactly soluble nonrelativistic model of particles with both electric and magnetic charges.** — // Phys. Rev. — 1968. — Vol. 176. — P. 1480–1488. — DOI: 10.1103/PhysRev.176.1480.
-  *Mcintosh H. V., Cisneros A.* — **Degeneracy in the presence of a magnetic monopole.** — // J. Math. Phys. — 1970. — Vol. 11. — P. 896–916. — DOI: 10.1063/1.1665227.
-  *Mardoyan L., Nersessian A., Petrosyan M.* — **The Stark effect in the charge dyon system.** — // Theor. Math. Phys. — 2004. — Vol. 140. — P. 958–964. — DOI: 10.1023/B:TAMP.00000333032.20685.60.
-  *Deriglazov A. A., Pupasov-Maksimov A. M.* — **Relativistic corrections to the algebra of position variables and spin-orbital interaction.** — // Phys. Lett. B. — 2016. — Vol. 761. — P. 207–212. — DOI: 10.1016/j.physletb.2016.08.034.

Квантовая теория дионов: волновая функция

Волновая функция системы заряд-дион, являющаяся решением уравнений

$$H_0\psi = E_0\psi, \quad J^2\psi = \hbar^2 j(j+1)\psi, \quad J_3 = \hbar m\psi, \quad (22)$$

С оператором углового момента $\mathbf{J} = -\hbar(i\nabla + \mu\mathbf{A}) \times \mathbf{r} + \hbar\mu\mathbf{r}/r$, записанная в параболических координатах, имеет вид

$$\psi_{n_1 n_2 m \mu}(\xi, \eta, \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{n^2 a^{3/2}} \Phi_{n_1 m - \mu}(\xi) \Phi_{n_2 m + \mu}(\eta) \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (23)$$

где

$$\Phi_{pq}(x) = \frac{1}{|q|!} \sqrt{\frac{(p+|q|!)}{p!}} e^{-x/2an} \left(\frac{x}{an}\right)^{|q|/2} L(-p; |q|+1; x/an). \quad (24)$$

В этом выражении a — боровский радиус, $n = n_1 + n_2 + (|m - \mu| + |m + \mu|)/2 + 1$, L — присоединённые полиномы Лагерра.